Топология и теория особенностей функций на сфере

Постановка задачи

Пусть дано расслоение $\pi : S^2 \hookrightarrow W \to M$ со структурной группой $G = SO(3)$ и гладкая функция $f : W \to \mathbb{R}$ в тотальном пространстве.

Задача: связать топологию расслоения (его характеристические классы) с классами особенностей ограничения функций на слои.

Характеристическая спектральная последовательность 1

Пусть топологическая группа *G* действует на стягиваемом пространстве *V*. Рассмотрим пространство $BV = EG \times_G V$. Зафиксируем разбиение V на G-инвариантные подмножества, именуемые *классами*:$G = \bigcup \Sigma_\alpha$. Тогда на V имеется фильтрация открытыми подмножествами $F_0 \subset F_1 \subset \ldots V$, где *F_i* - объединение всех классов коразмерности не выше *i*. С этой фильтрацией связана спектральная последовательность, сходящаяся к группам когомологий $H^*(BV)$. Эта последовательность называется характеристической спектральной последовательностью.

В нашем случае $V = C^\infty(S^2), \quad G = SO(3)$.

Характеристическая спектральная последовательность 2

Сечение $s : M \to W$ общего положения переносит на *M* классификацию точек из *W*. Получается разбиение *M* на страты, гомеоморфные стратам особенностей в *V*. Страты данного разбиения в M называются дискриминантными подмножествами. На базе исходного сферического расслоения они соответствуют тем точкам базы, в которых функция *f* имеет вырождения, причем коразмерность вырождения соответствует коразмерности стратов.

Теорема. Для всякого (G,V)-расслоения на M и сечения общего положения s имеется естественный гомоморфизм $\varkappa^* : E_*^{*,*} \to E_*^{*,*}(M)$, который является характеристическим.

Характеристическая спектральная последовательность 2

Теорема. Столбец $E_1^{p,*}$ начального члена характеристической с.п. является прямой суммой слагаемых, отвечающих классам коразмерности p.

Сферические расслоения

Пусть дано расслоение $\pi: S^2 \hookrightarrow W \to M$ со структурной группой $G = SO(3)$.

Когомологии $BSO(3)$:

$$H^*(BSO(3), \mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[p_1, e, \delta w_2]}{(2e = 0, 2\delta w_2 = 0)},$$

$$\deg p_1 = 4, \deg e = 3, \deg \delta w_2 = 2$$

В тотальном пространстве задана гладкая функция $f: W \to \mathbb{R}$ общего положения. Рассматривая в качестве V пространство гладких функций на сфере и применяя к нему предыдущую теорию, мы будем устанавливать связь между топологией расслоения π и классами особенностей функций f. В работе выбрана классификация особенностей глобального минимума.

Классификация особенностей глобального минимума

Функции на сфере могут иметь в точках минимума только особенности вида $x^{2k}+y^{2l}$.
При $l=1$ имеем $x^{2k}+y^2$, обозначим эти особенности A_{2k+1}. В коразмерностях до 8 включительно встречаются только особенности A_m.

Список возможных особенностей функций на сфере в коразмерностях до 4 приведен ниже (здесь $(a_1 a_2 \dots a_n)$ обозначает функции с n точками минимума, в каждой из которых особенность типа A_(a_i)):

codim	список особенностей
0	(1)
1	$(1,1)$
2	$(3),\ (1,1,1)$
3	$(3,1),\ (1,1,1,1)$
4	$(5),\ (3,1,1),\ (1,1,1,1,1)$

Описание стратов в пространстве BV

Страт, соответствующий классу функций (a_1 a_2 … a_n) в пространстве BV обозначим [a_1 a_2 … a_n]. В задачу описания характеристической с.п. входит вычисление когомологий стратов и описание их гомотопического типа.

Основным результатом работы является описание когомологий и гомотопического типа стратов в первых коразмерностях, а также некоторых серий стратов. Ниже показан первый лист характеристической с.п., столбцы которого сформированы группами когомологий стратов соотв. коразмерности.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
q & & & & & \\
4 & \mathbb{Z} & * & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 & * & \\
3 & 0 & * & 0 & * & \\
2 & \mathbb{Z} & * & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & * & \\
1 & 0 & * & 0 & * & \\
0 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \quad p
\end{array}
$$

Основные результаты

Теорема 9. *1. Страт* $[1]$ *является пространством* $BSO(2) \simeq BS^1$.

2. Страт $[11]$ *является пространством* $BO(2)$.

3. Страт $[111]$ *является пространством* BS_3.

4. Страты $[1^n], n \geqslant 4$ *гомотопически эквивалентны неупорядоченному конфигурационному пространству* $\mathrm{UConf}(S^2_{n-3}, n-3)$ *(*S^2_{n-3} *обозначает сферу с* $n-3$ *проколами).*

Теорема 10. *1. Страты* $[n]$ *имеют когомологии как у пространства типа* $B\mathbb{Z}_2$.

2. Страты $[n1]$ *имеют когомологии как у пространства типа* $B\mathbb{Z}_2$. *(*$n > 1$ *нечетное)*

Спасибо за внимание.